

● 数学教育 ●

制作活動を通じた数学的活動の授業デザイン ～関数の焦点に着目して～

大阪府 関西学院千里国際中等部・高等部（校長 萩原伸郎）

- ・ 放物線の概形を定義に従って理解する
- ・ 関数の焦点を先取りして学ぶ
- ・ 放物線の名前の由来とその歴史を知る
- ・ 身の回りにある数学的事象を捉えることで身近に感じる
- ・ 放物線定規を作成することで、数学を体感する

本校は、関西のグローバル教育のリーダーを目指して大阪インターナショナルスクールと共に1991年に設立された。この2つの学校は2校で1つの存在である。教室や施設を全て共有し、授業、クラブ活動、行事を共に行っている。この2校には共通のミッション「知識と思いやりを持ち、創造力を駆使して世界に貢献する個人を育む」と5リスペクト「自分を大切に・他の人を大切に・学習を大切に・リーダーシップを大切に・環境を大切に」と呼ばれる指針がある。

また、帰国生受け入れ校でもあり、およそ半数以上の生徒が国際的な背景を持っている。そのため、海外でインターナショナルスクールやローカルスクールで学んでいた場合、生徒の学習履歴が異なる場合もある。数学科では既習内容のフォローをしつつ、学ぶ意味を大切にして授業をしている。



本校正面

1. 研究概要

1.1. 学習指導要領における関数の扱い

2021年度から新学習指導要領が始まっている。学年の目標において、関数の学習で育成を目指す資質・能力に注目すると、「知識及び技能」では基礎的な概念や原理・

法則などを理解するとともに、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにするとしている。「思考力、判断力、表現力等」では関数関係に着目し、その特徴を表、式、グラフを相互に関連付けて考察する力を養うとしている。そして「学びに向かう力、人間性等」では数学的活動の楽しさや数学のよさを実感して粘り強く考え、数学を生活や学習に生かそうとする態度、問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとする態度、多様な考えを認め、よりよく問題解決しようとする態度を養うとしている。

また、今回の改訂の基本的な考え方の1つとして「体験活動の重視」が挙げられている。さらに「主体的・対話的で深い学び」が求められている。このことから、受動的な授業形態からの脱却の一案として、制作活動を授業に取り入れることには十分な可能性があるのではないだろうか。

これらの目標を満たす授業をデザインすることを目指す。そのために、現行の学習内容をまとめ、その問題点を明らかにする。

1.2. 放物線の学習内容

放物線を初めて学習するのは中学3年生次の「関数 $y=ax^2$ 」である。この単元では、頂点が原点と重なる2次関数を学ぶことを目的としている。多くの教科書では、自由落下運動のように、2乗に比例する関係を例にし、2変数の関係性を明らかにすることを導入としている。

関数 $y=ax^2$ のグラフの学び方は、関数 $y=ax^2$ について x と y の増減関係を表にまとめ、この表をもとにして x と y の値の組を座標とする点を座標平面に書き入れる方法が多い。また、原点付近では x 座標を

0.1ごとに点を書き入れるなどして、関数 $y=ax^2$ のグラフは曲線になるであろうことを説明している。

関数 $y=ax^2$ のグラフのまとめとしては、 y 軸を対称の軸として線対称であること、原点を必ず通りその点が頂点であること、比例定数 a の符号により x 軸のどちら側にあるかなどが挙げられる。つまり、放物線については原点を通り、 y 軸を対象の軸として左右対称な曲線として学んでいる。

1.3. 放物線指導の問題点

中学校で学ぶ関数のグラフは1次関数の直線と反比例の双曲線、そして原点を通る放物線の3種類である。これらの関数のグラフの概形は、先述のように x と y の増減関係を表にまとめ、この表をもとにして x と y の値の組を座標とする点を座標平面上にいくつかプロットすることで学ぶことが多い。そのため、曲線である双曲線と放物線について、生徒は曲線の曲がり具合についてそれとなく書くことになる。

この曲がり具合を理解するために必要な焦点を学ぶタイミングは数学Ⅲである。しかしながら、文部科学省による「平成27年度公立高等学校における教育課程の編成・実施状況調査」によると、数学Ⅲの履修率は21.6%である。本校の場合はおおよそ10%程度になる。つまり、焦点を学ばずに、なぜ曲線があのようカーブするのか、どのように日常生活に活かされているのか知ることなく中等教育の数学を学び終わる生徒が少なくない。これでは、先の学習指導要領における数学科の目標を成し得ない項目が生まれてしまうであろう。

本研究では、1次関数のグラフを書く際に、定規を用いて直線を書くように、作図器具の開発という数学的活動を通して、曲

線がもつ性質を深く学ぶことを目指す。そのため、最速降下問題へと帰着する中高6年間の横断的な授業計画を作成し、作成した授業計画を担当者が受け持つ中学の授業で実践する。生徒からアンケートを通して得たフィードバックを分析し、作成した授業計画の可能性と課題を明らかにする。

2. 授業デザイン

2.1. 制作活動を伴う学び

先にも示した平成29年に告示された新中学校学習指導要領では、子どもたちが未来社会を切り拓くための資質・能力を一層確実に育成すること、前回改訂された学習指導要領の枠組みや教育内容に加えて知識の理解の質を高めること、豊かな心や健やかな体を育成することを基本的なねらいとして改訂された。その中で「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善の推進について言及されている。中学校数学科では数学的活動の一層の充実が図られている。そのためには、数学的に問題発見・解決する過程を学習過程に反映させることが重要である。

この理念を重視した授業として、本校では独自科目の数学ヒストリーツアーという授業を開講している。この授業は高校3年次の最終学期に開講され、数学的活動を通じて中高6年間の数学を見つめ直すことを目的としている。そのために、授業は3つのステップで構成している。初めのステップは数学史を知ることである。これまでとは異なる視点から数学を見ることで、数学を学ぶ意識を変えることが狙いである。次に、中高6年間で学んできた数学の公式や定理を数学史の観点で見つめ直す。数学史の観点から見つめ直すことで、数学のよさや数学の有用性に気づくことができる。最

後に、4人程度のグループで数学を体感できる作品を制作する。前回の活動で、中高6年間で学んできた数学について見つめ直すのが、レポートやスライドにまとめるだけでは学びの深さに物足りなさが残る。そこで、数学を体感できる作品を制作することで、より数学のよさや有用性を深く実感することができる。受講者へのアンケートよりも数学を体感することへの好評価があり、もっと早く知りたかったという声もあった。

このように、制作活動を通じた授業を行うことで、学習指導要領に記載されている多くのねらいや目標を達成することができる。そこで、授業の導入部分で採用する。

2.2. 最速降下問題

最速降下問題とは、鉛直面に与えられた2点間を曲線で結び、その曲線に沿って質点を滑り落とすとき、最も短い時間で滑り落ちる曲線を求める問題である。この問題はヨハン・ベルヌーイやライプニッツなどによって解かれた。

以上のことから、表1のように中高6年間の授業デザインを行うことができる。それぞれの段階で x と y の関係性を示す具体例として、玉を転がす時間と距離の関係を採用する。また、物理と教科横断型授業を展開することもできる。

最速降下問題は実物も作りやすく、科学館に装置があることも少なくない。例えば、直線と放物線、サイクロイドの坂道を用意した場合、質点が最も速く転がることのできる坂道はサイクロイドである。このことを証明するために必要な知識は多いが、各学習課程においてグラフの性質を理解しておくことが大切である。

表1：最速降下問題

学年	学習内容
中学1年生	比例
中学2年生	1次方程式
中学3年生	放物線
高校1年生	2次方程式
高校2年生	3次方程式、微分法
高校3年生	サイクロイド

2.3. 放物線の授業デザイン

放物線の認識に関する課題として、曲線の捉え方が挙げられる。曲線である放物線は2次曲線の1つであるが、中学校過程で習う2次曲線が放物線しかないために、先述の通り教科書では放物線は曲線であると説明されている。

制作活動を通して学ぶねらいは曖昧な理解から脱却することである。曲線だけでなく、放物線の定義として学んだことを自分がどのように理解しているのか客観的に知ることが大切である。その上で自分の認識と実際の定義との差異を明らかにし、理解を深めることを目指す。また、制作活動を取り入れることで、数学が数式としてだけでなく、目の前に存在することでより身近なものとして感じてもらいたい。

以上のことから、表2のように3時間の授業実践をデザインした。3時間の授業で「気付き、学び、知る」の3ステップを実践することができる。

表2：授業計画

時間	授業内容	ねらい
1時間目	放物線を探す	直感
2時間目	放物線かどうか	真偽
3時間目	定規を作成する	体感

3. 授業実践

3.1. 授業準備

関数 $y=ax^2$ のグラフについて学んだ後に3時間使う。この3時間の授業の目標は、自分の放物線の理解度を客観的に知ることと正しく理解することである。放物線の理解度を測る方法として、身の回りにある曲線が放物線であるかどうか判別する。判別するためには基準が必要となる。この基準を把握するための授業をデザインする。

また、放物線を正しく理解する方法として、放物線定規を通して放物線の性質を学習する。1次関数が直線であることを理解できる理由の1つに、定規でグラフを描画できることが挙げられるだろう。そのため、放物線定規でグラフを描画できれば、放物線が性質を有する曲線であることが理解できるだろう。しかし、放物線定規は自作する必要がある。そこで、制作活動として放物線定規の制作を採用する。

一方で、制作時間に多くの時間を割くことはできず、また制作すること自体は授業の目標を達成するために大切な項目ではない。そこで放物線定規の下準備をしておく。今回の制作活動は接着のみとした。プラ板やプラ棒、紐をカットしておき、それぞれのパーツを接着することで放物線定規が作成できるようにした。また、授業中に制作方法を説明するが、個々人の制作速度に対応できるように、パーツの接着順を説明した制作方法動画も用意した。

3.2. 1時間目

本時のテーマは「身の回りにある放物線を見つける」ことである。噴水やホームラン、パラボラアンテナなど身のまわりにある曲線が放物線かを見つけることで、自分自身がどのように放物線かどうかを判別して

いるのかを客観的に知ることが目的としている。授業前に行ったアンケートでは、問の1つである「2乗に比例する関数のグラフはどんな形をしていますか?」に関して、88の回答のうち放物線と答えた回答は約半数の45に留まった。誤答としては「U字」が16、「曲線」が9、「楕円、0を半分」が4、「指」が3であった。この回答結果から、生徒は放物線を左右対称の曲線として捉えてはいるが、2乗に比例する関数の増減関係に理解の壁があることがわかる。

1時間目の導入では関数 $y=ax^2$ のグラフが曲線であることを確認した。また、本校では中学1年生の理科の授業でパラボラアンテナを制作している。曲面にアルミホイルを貼り付け、マシュマロを焼いたことを思い出し、なぜマシュマロを焼くことができたのか問いを投げかけた。生徒の反応から見るに、光がそこに集まるといことは記憶している様子であった。

関数 $y=ax^2$ のグラフの特徴を再確認したところで、校内にある放物線を探すワークに移る。4人前後のグループに分かれて行う。図1のようにデバイスを持ってワークを行い、見つけた放物線はJamboardに記録していく。このワークの目的は身の回りを「数学の目」で見ることである。意識し



図1：校内探索の様子

て異なる目線でいつもの環境を見ることで、新しい気づきを得ることができる。

生徒は曲線を見つけるたびに足をとめ、放物線であるか話し合いながら考えていた。例えば、トロフィーが飾ってあるギャラリー前では多くの生徒が足をとめていた(図2)。トロフィーのカップ部分の曲面が気になっている様子である。



図2：ギャラリー前

また、消火栓のランプ部分に注目するグループもいた。他にはフィールドにあるバスケットコートや曲線になっている玄関の屋根などに注目していた。

校内を探索したのち、教室にてJamboardの整理を行う。探してきた候補を整理しつつ、さらに候補を増やしていく(図3)。

JamboardはGoogle社が提供しているオ



図3：Jamboardの画面

ンラインホワイトボードアプリである。同時編集可能であり、5色の付箋以外にも描画機能や画像掲載機能がある。グループによっては図4のように、これらの機能を駆使して見やすい作品を作っていた。



図4：Jamboardの編集

本授業のまとめとして、各グループのJamboardを見合い、重複している事例についてまとめた。授業始めに例として挙げたパラボラアンテナはもちろんのこと、校内にあるものとしてはトロフィーや給水機、バスケットボールコートのスリーポイントラインなどに票が集まった。インターネットで調べたものとしては懐中電灯や噴水、吊り橋などに票が集まった。ただし、懐中電灯については光（光線）が放物線であるとして候補に挙げていたグループがあった。おそらく放物線の性質を持つものとしての検索結果であろうが、懐中電灯のどの部分が放物線であるのかまで深く調べることができていないことが原因であろう。この点は生徒のメディアリテラシーの課題として挙げられる。

3.3. 2時間目

まず、授業準備として前回の授業のまとめで挙げられた放物線の候補について、それが放物線であるかどうかを問う15問程

度のアンケートをGoogle Formsで作成した。各候補について放物線であるかどうか回答し、判断理由を自由記述で書かせる形式である。放物線の各候補については、前回の授業において各クラスでまとめた事例を採用している。

本時のテーマは「それが放物線である根拠と必要性を明らかにする」ことである。放物線の判断基準を明確にし、一般化していくことで、放物線の定義を見つけることを目指す。放物線の性質を有する候補から、どのように放物線の性質を利用しているか分析することで放物線の焦点に気づくことができるだろう。

まずは授業の導入として、前授業でまとめた放物線の性質を持つ各候補についてどう考えているか、配布されたGoogle Formsに回答する。それぞれの事例について、放物線であるかどうかとそう判断した理由を答える。

全員が回答を終えたら、回答結果について考察する。例えば、私が受け持ったクラスの19人の回答は表3ようになった。

表3：回答結果

候補名	放物線である
パラボラアンテナ	94.7%
バナナベンチ	47.4%
懐中電灯の光	63.2%
バスケのシュート軌道	84.2%
ホームランの軌道	68.4%
吊り橋のアーチ	78.9%
銀河系	15.8%
音波	94.7%
ウォータークーラー	89.5%
トロフィー	73.7%
U型磁石	57.9%

候補名	放物線である
噴水	89.5%
スリーポイントライン	57.9%
火災報知器のランプ	73.7%
カラーコーン	73.7%

最も多く放物線であると回答した候補はパラボラアンテナと音波であった。パラボラアンテナは放物線の具体例として有名だが、音波は三角関数である。この誤答の原因として、判断理由に書かれている「線対称だから」や「一定の間隔で同じアーチを描いているから」が挙げられるだろう。このことに対し、パラボラアンテナの判断理由には、前回の授業で調べたときに学んだ内容が書かれていた。

また、回答結果が50%前後である回答結果がおよそ半分に分かれた候補は、校舎内にあるカーブしたベンチであるバナナベンチとU型磁石、スリーポイントラインであった。それぞれの判断した理由を比較していると、先の回答と同様に、放物線であると誤解している原因は左右対称にありそうである。逆に、放物線でないとの回答の判断した理由には、直線部分が存在するか否かが大きいようである。

他にも興味深い回答結果としては放物線と懸垂曲線の違いに気づいていない点やカラーコーンの形は円錐であることに気づいていない点が挙げられる。特にカラーコーンについては円錐であるため、円錐曲線の1つが放物線であることに気づいた生徒もいた可能性はある。しかし、判断した理由を見てみると、「半分に切ったときに左右同じ幅になるから」という答えは円錐曲線に近い考えであるように思うが、一方で「先っぽが丸くなっているから」という理由から放物線でない判断している生徒も

いた。放物線でない判断した理由に「直線になっている」があり、放物線が曲線であることを理解できていることが読み取れる。

集計結果から、まずは多数派が多いところから考察し、次にせめぎあっている回答がなぜかを考察する。これにより、放物線の具体例の調べ方の精度が上がるのが期待される。放物線の具体例だけを調べるのではなく、なぜ放物線といえるのか考える必要があるからである。このように回答結果について考察し、放物線の特徴・特性が何か話し合い、放物線の焦点を見つける。

授業のまとめとして、放物線の定義を明らかにする。放物線には焦点と準線があることを確認する。これらについては、一般式は高校で習うことを注意し、生徒に前置きしておくようすることで混乱を避ける。

また、放物線の定義の体感方法として、焦点と準線を記した紙を折る方法を紹介する。直線（準線にあたる）とその直線上にない1点（焦点にあたる）が記された紙を用意する。準線に垂直である直線を何本か引き、その直線と準線との交点が焦点と重なるように折り曲げる。このとき、折り目と直線の交点に印をつけておく。この作業を複数回繰り返したとき、印をつけられた交点を結んでいくと放物線の形になる。この体感方法は放物面での反射の仕組みがわかりやすく、焦点と準線を理解しやすい。

3.4. 3時間目

本時のテーマは「放物線の定義から、放物線を描ける定規を作る」ことである。これまでの授業で放物線の理解が曖昧だったことに気づき、またその理由を明らかにし

てきた。その解決策として焦点と準線を学び、放物線の定義を明らかにした。つまり、左右対称な曲線が放物線なのではなく、左右対称な曲線の中でもさらに一部のものであることから、放物線の曲がり具合は一様に決まる。このことを体感する方法が本研究のテーマである放物線定規である。焦点からの距離と準線からの距離が等しいことを利用した定規を作り、放物線を作図することで、放物線が規則的な曲線であることを実感することができる。

まず始めに Google classroom を通じて資料を配布する (図5)。放物線定規の作成手順について、投稿画面での文章と制作方法動画を載せておき、合わせて口頭でも説明を行う。複数の方法で作成手順を示しておくことで、生徒が自分の作成スピードに合わせて参考にできる環境を整えておいた。また授業の冒頭では、前時の復習として、GeoGebra を使用して前回見つけた放物線の定義を確認した。



図5：授業資料の配布

その後、作成手順を元に自分の定規をつくる。まず材料と接着剤を配布する。先述

したとおり、今回は材料を接着するだけで完成するように準備をしておいた。図6のように、パーツとパーツを指示通りに接着する。

作成場面においては、接着部分を固定するために1人では作業が難しい場面もある。例えば、最後の工程である紐をプラ板に固定する場面では、ネオジム磁石が接着されている先がちょうどプラ板の端に合わなければならない。また、余分な弛みが生まれないように、プラ板に沿わせながら長さを調節する必要がある。そこで図7のように、協力して作成するグループもあった。

放物線が完成したら、実際に放物線を作図してみる。制作活動の進行スピードには個人差が生まれやすいため、放物線の定規



図6：作業場面



図7：共同作業場面

の使い方についても動画（図8）を作成しておいた。放物線定規で放物線を描画する手順は次の通りである。



図8：使い方動画

1. 準備した磁石面（金属板やホワイトボード）の上に敷いた紙に準線と焦点を適当に作図する。
2. 2つに分かれている定規のうち、紐がついていない定規のコの字型部分が準線に重なるように設置する。
3. 紐の先についているネオジム磁石を焦点に重なるように設置する。
4. もう1つの定規のプラ棒部分が設置されている定規のコの字型の隙間に入るように合わせる。
5. 定規に沿わせた筆記具で紐がレの字型でピンと張るように調整しながら左右に動かしながら描画する。

またコロナ禍ということもあり、オンラインで授業を受けている生徒もいる。そこで、遊び方の動画の後半には家で放物線定規を作る方法も掲載した。オンラインで授業を受けている生徒は、定規2つと紐、画鋏を用意する。定規の1つに、紐の先と定規の端を合わせ、沿わせていきながら、もう片方の端にある紐をテープで定規に貼り付ける。

この場合も、紙に準線と焦点を作図し、

準線に定規を1つ沿わせ、紐の先を焦点に重ねて画鋏で固定する。平行線を書く要領で、紐のついた定規をもう一方の定規に沿わせて左右に移動させる。このときに紐がレの字型でピンと張るように筆記具で作図すれば良い。

作図後は放物線と比較してみることで放物線定規が機能していることを確かめることができる。この活動を通して、放物線の曲線具合には意味があることを理解することができる。

4. おわりに

4.1. 実践授業の振り返り

合計3時間の実践授業では大きな混乱が生じることなく中学3年生の5クラスで実施することができた。特に、私が担当していたクラスは5クラスのうち1クラスのみであり、残りの4クラスは作成した授業案を元に2人の数学教員が実践を行なった。放物線定規の材料については全て私が用意したが、授業で用いた Google forms や Jamboard、動画については Google classroom を通じて共有することでお互いの授業準備の負担を軽減することができた。

2時間目に行なった放物線の判別テストでは、判別候補について5クラスごとに変更した。1時間目にクラスでまとめた放物線の候補たちの中には、パラボラアンテナのように全てのクラスで提案された候補もあったが、それ以外の候補もあったため、各クラスに適した判別候補に変更することで、放物線の判定テストへの取り組み度合いに影響があったように思う。15問という問題数もさることながら、それぞれの問題について判別理由を入力することを課していたが、ほとんどの生徒が判別理由まで入力していた。

3時間目では、制作時間の個人差が予想以上に大きかった。30分の制作時間を予定していたが、作業が早い生徒であれば10分程度、遅い生徒であれば30分かかってしまった。放物線の使い方の動画を用意しておいたおかげで、作業が早く終わった生徒は次の活動に移ることができていたが、十分にフォローすることができなかったことが悔やまれる。今回は接着のみとはいえ、自分の放物線定規を製作することで定規自体に愛着が湧き、教育目標の達成効果を最大限に上げることに期待したが、製作活動が苦手な生徒にとっては効果が見られなかった。製作方法については、オンライン受講の生徒と同様に、自分の定規を2つ用意させたほうが授業展開がスムーズであったかもしれない。

以上のように、製作方法や製作物については課題が残ったが、授業デザインの成果としては目標を達成することができたのではないだろうか。放物線の曲線について曖昧だった理解が改善され、放物線の定義から放物線のよさを知ることができた。

4.2. 研究の反省と成果

本研究では実践授業の初めと最後にアンケートを実施した。その結果を分析することを中心にして、本研究の今後への課題を示したい。

授業前後のアンケートでは、数学の有用性について同じ質問を2つ用意した。5段階評価で質問したところ、平均値が「数学は世の中の役に立っていると思いますか？」は3.7から4.2に、「2乗に比例する関数は自分の身の回りに関係がありそうですか？」は2.8から3.6に上昇した。

また、数学的活動の中心に製作活動を据えたが、概ね好評価であった。「実際やっ

てみることによってどんな形なのかなどを知ることができてわかりやすくなった」という感想や「あんなに簡単なもので作れると思っていなかったので少し前よりも身近に感じました」という感想があった。純粋に楽しかった、面白かったという感想も見受けられた。その一方で、「接着剤が手についた」や「部品が小さくて難しかった」など制作の難易度が負の影響を与えている場合もあった。

以上より、数学的活動として製作活動を取り入れることには一定の効果が認められる。ただし、得られる効果は製作活動の達成度に影響する。そのため、クラス全員が達成できる難易度で、数学を体感できるように授業デザインする必要がある。今後の課題として、授業に取り入れることができる製作活動を考案する際には、その製作活動の難易度にまで留意することが求められる。

(研究主任：小川達也)